

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

《CSP-J 初赛真题分类解析》

Day04-简单数论与组合数学

主讲人：小武老师

简单数论

辗转相除法、最小公倍数、三大余数定理、同余、质数判定等



简单数论



初等数论

偶数与奇数

如何判定

质数与合数

普通判定方法

开根号法

质因数分解

求最大公约数

求最小公倍数

最大公约数

普通方法

辗转相除法

最小公倍数

分解质因数法

公式法



因数和倍数



定义1: 设 a, b 是整数, $b \neq 0$. 如果有一个整数 c , 它使得 $a=bc$, 则 a 叫做 b 的倍数, b 叫做 a 的因数。我们有时说, b 能整除 a 或 a 能被 b 整除;

$12 = 3 \times 4$ 12 是 3 的倍数, 3 是 12 的因数。 3 能整除 12 , 或 12 能被 3 整除

如果 b 能整除 a , 我们可以用 $b|a$ 这个符号来表示。如:

$$2|4, 3|6, 6|(-30), (-5)|20$$

$$2|4, 3|6, 6|(-30), (-5)|20$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$



质因数分解



算术基本定理，又称为正整数的**唯一**分解定理，即：每个大于1的自然数，要么本身就是质数，要么可以写为2个或以上的质数的积，而且这些质因子按大小排列之后，写法**仅有一种方式**。

$$6936 = 2^3 \times 3 \times 17^2$$

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

算术基本定理的内容由两部分构成：

- 分解的存在性：
- 分解的唯一性，即若不考虑排列的顺序，正整数分解为素数乘积的方式是唯一的

把一个合数分解成若干个质因数的乘积的形式，即求质因数的过程叫做**分解质因数**。



算术基本定理



例1 求以下合数的标准分解式（质因数分解）

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

Q1: 有什么规律？能否描述计算的步骤？

Q2: 如果编程来实现呢？



素数和复合数



引理1: 设 a, b 是两个整数, $b \neq 0$. 则一定有并且只有两个整数 q, r , 可使以下表达式成立:

$$a = bq + r, 0 \leq r < |b|$$

$$eg. 12 = 3 \times 4 + 0$$

$$eg. 23 = 3 \times 7 + 2$$

$$eg. 27 = 3 \times 9 + 0$$

$$eg. 100 = 33 \times 3 + 1$$



素数和复合数



定义2: 一个大于1的正整数，只能被1和它本身整除，不能被其它正整数整除，这样的正整数叫做素数（也叫做质数）。

eg. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 都是质数

Q3: 如何判定一个数是质数？

定义3: 一个正整数除了能被1和它本身整除以外，还能被另外的正整数整除，这样的正整数叫做复合数（也叫做合数）。

eg. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 都是合数

Q4: 如何判定一个数是合数？



素数和复合数



由素数和复合数的定义，可知，全体正整数可分为三类：

(1) 1这个数

(2) 全体素数（质数）

(3) 全体复合数（合数）

Q5: 合数有多少个？

定义4: 如果一个正整数 a 由一个因数 b ，而 b 又是素数，则 b 就叫做 a 的素因数（质因数）。例如， $12 = 3 \times 4$ ，3是素数，而4不是素数，所以3是12的素因数（质因数）。而4不是12的素因数。



素数和复合数



引理2: 如果 a 是一个大于1的整数，而所有 $\leq \sqrt{a}$ 的素数都除不尽 a ，则 a 是素数。

Step 1: 证明 (1) : 如果 a 被 > 1 而 $\leq \sqrt{a}$ 的整数都除不尽，则 a 是素数

假设 a 是合数，则 $a=bc$ ，而 a 被 > 1 而 $\leq \sqrt{a}$ 的整数都除不尽，则 $b > \sqrt{a}$ ， $c > \sqrt{a}$ ，则 $bc > a$ ，这与 $bc=a$ 是矛盾的。

```
bool isPrime(int n){  
    if (n == 0 || n == 1) return false;  
    for (int i = 2; i <= sqrt(n); i++){  
        if( n%i == 0){  
            return false;  
        }  
    }  
    return true;  
}
```

开根号法判定质数



最大公约(因)数



最大公约数(greatest common divisor, 简称为gcd)

$$10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$$

10有因数1, 2, 5, 10

$$15 = 1 \times 15 = 3 \times 5$$

15有因数1, 3, 5, 15

1, 5都是10和15的公因数

定义5: 如果 $n \geq 2$ 是整数，而 a_1, a_2, \dots, a_n 和 d 都是正整数。又设

$$d | a_1, d | a_2, \dots, d | a_n$$

则 d 叫做 a_1, a_2, \dots, a_n 的公因数，公因数中的最大的那一个数叫做 a_1, a_2, \dots, a_n 的**最大公因数**。

记作：

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$$



最大公约(因)数



例1 求36和24的最大公因数。

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

素因数2, 2, 3是这两个数所共有的，它们的乘积就是这两个数的最大公因数。

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

例2 求48，60和72的最大公因数。

$$48 = 2 \times 2 \times (2 \times 2 \times 3) = 2^4 \times 3$$

$$60 = (2 \times 2 \times 3) \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$72 = 2 \times (2 \times 2 \times 3) \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

求几个数的最大公因数，先把这些数分别分解素因数，然后在各个公有的素因数里，取出公共的部分相乘即可。



辗转相除法（欧几里得算法）



引理：假设 a 和 b 都是正整数，且 $a > b$,

$$a = bq + r, \quad 0 < r < b$$

其中 q 和 r 都是正整数，则 a 和 b 的最大公因数等于 b 和 r 的最大公因数。即

$$(a, b) = (b, r)$$

$$124 = 20 \times 6 + 4$$

124和20的最大公约数是？ 20和4的最大公约数？

证明：设 $(a, b) = d$, $a = dm$, $b = dn$, 由 $r = a - bq = (m - qn)d$, 所以 $d \mid r$.
由 $d \mid r, d \mid b$, 所以 $d \mid (b, r)$, 即 $(b, r) \geq d$. 假设 $(b, r) = D > d$, 则 $D \mid b$,
 $D \mid r$, 由 $a = bq + r$, 所以 $D \mid a$. 由 $D \mid a, D \mid b$ 所以, $D \mid (a, b)$, 即 $(a, b) = d \geq D$, 此
与假设 $(b, r) = D > d$ 矛盾, 所以 $(b, r) = d$. 因此, $(a, b) = d = (b, r)$.



辗转相除法 (欧几里得算法)



例3 求6731和2809的最大公因数

$$6731 = 2809 \times 2 + 1113$$

$$2809 = 1113 \times 2 + 583$$

$$1113 = 583 \times 1 + 530$$

$$583 = 530 \times 1 + 53$$

$$530 = 53 \times 10 + 0$$

$$(6731, 2809) = (2809, 1113)$$

$$(2809, 1113) = (1113, 583)$$

$$(1113, 583) = (583, 530)$$

$$(583, 530) = (530, 53) = 53$$

$$(6731, 2809) = 53$$

例4 求5767, 4453最大公因数

$$(5767, 4453) = 73$$

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} a & b=0 \\ \gcd(b, a \% b) \end{cases}$$



辗转相除法（欧几里得算法）



$$(6731, 2809) = (2809, 1113)$$

$$(2809, 1113) = (1113, 583)$$

$$(1113, 583) = (583, 530)$$

$$(583, 530) = (530, 53) = 53$$

$$(6731, 2809) = 53$$

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} a & b=0 \\ \gcd(b, a \% b) \end{cases}$$

```
int gcd(int m, int n){//辗转相除法
    if(n == 0) return m;
    else return gcd(n, m%n);
}
```




最小公倍数



最小公倍数(Least Common Multiple, LCM)

定义6：如果 $n \geq 2$ 是整数，而 a_1, a_2, \dots, a_n 和 m 都是正整数，又

$$a_1 | m, a_2 | m, \dots, a_n | m$$

则 m 叫做 a_1, a_2, \dots, a_n 的公倍数。如果 m 是 a_1, a_2, \dots, a_n 的最小的公倍数，我们就写作：

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = m$$

$$\{4, 6\} = 12$$

求解方法： 分解质因数法。最小公倍数等于它们所有的质因数的乘积（如果有几个质因数相同，则比较两数中哪个数有该质因数的个数较多，乘较多的次数。



最小公倍数



最小公倍数(least Common Mutiple, LCM)

求解方法： 分解质因数法。最小公倍数等于它们所有的质因数的乘积（如果有几个质因数相同，则比较两数中哪个数有该质因数的个数较多，乘较多的次数。

例5 求36和24的最小公倍数

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$lcm(36, 24) = 3^2 \times 2^3 = 72$$

例6 求108, 28和42的最小公倍数

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$lcm(108, 28, 42) = 2^2 \times 3^3 \times 7 = 756$$



最小公倍数



最小公倍数(least Common Mutiple, LCM)

求解方法： 公式法。假设a和b都是正整数，a和b的最大公因数是d，而a和b的最小公倍数是m，即 $(a,b)=d$ ，而 $\{a,b\} = m$ ，则：

$$ab = dm$$

例5 求36和24的最小公倍数

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$lcm(36, 24) = 36 \times 24 / 12 = 72$$

例6 求108，28和42的最小公倍数

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$lcm(28, 42) = 28 \times 42 / 14 = 84$$

$$lcm(84, 108) = 84 \times 108 / 12 = 756$$



真题解析



【2019CSP-J选择题】319 和 377的最大公约数是（29）。

【2019CSP-J选择题】100以内最大的素数是（97）

【2018普及组选择题】10000 以内，与 10000 互质的正整数有（ ）个。

互质是公约数只有1的两个整数，叫做互质整数。

$$10000 = 2^4 \times 5^4$$

10000以内的2的倍数有5000个，5的倍数有2000个，既是2的倍数又是5的倍数，有1000个，所以有5000+2000-1000=6000个，10000再去掉6000个，就是4000。



同余



定义1: 如果 a 和 b 都是整数而 m 是一个固定的正整数，则当 $m \mid (a-b)$ (即 m 能够整除 $a-b$)时，我们就说 a, b 对模 m 同余，记作：

$$a \equiv b(\text{mod } m)$$

当 m 不能整除 $a-b$ 时，则我们就说 a, b 对模 m 不同余，记作：

$$a \not\equiv b(\text{mod } m)$$

$$29 \equiv 2(\text{mod } 9)$$

$$93 \equiv -7(\text{mod } 50)$$

$$161 \not\equiv 0(\text{mod } 8)$$

$$257 \equiv 16(\text{mod } 32)$$



同余



判断以下式子是否正确（即是否同余）

$$29 \equiv 2(\text{mod}9) \quad (\checkmark)$$

$$29 \div 9 = 3 \cdots 2$$

$$2 \div 9 = 0 \cdots 2$$

$$9 \mid (29 - 2)$$

9能整除27

$$9 \mid 27$$

$$161 \not\equiv 0(\text{mod}8) \quad (\checkmark)$$

$$161 \div 8 = 20 \cdots 1$$

$$0 \div 8 = 0 \cdots 0$$

$$8 \nmid 161$$

8不能整除161



同余



例1 今天是星期一，再过100天是星期几？ 答案：星期三

$$100 \div 7 = 14 \cdots 2$$

例2 如果98和66除以同一个数都余2，求这个数是多少？ 答案：4、8、16、32

$$98 \div x = q_1 \cdots 2$$

$$66 \div x = q_2 \cdots 2$$



$$98 \equiv 66 \pmod{x}$$



$$x \mid (98 - 66)$$



x能整除32

$$x \mid 32$$

32 的约数有：1、2、4、8、16、32



除数要大于余数



4、8、16、32



三大余数定理



(1) 余数的加法定理

a与b的和除以c的余数，等于a，b分别除以c的余数之和，或这个和除以c的余数。

$$(23 + 16) \% 5 = ?$$

(2) 余数的乘法定理

a与b的乘积除以c的余数，等于a，b分别除以c的余数的积，或者这个积除以c所得的余数。

$$(23 \times 16) \% 5 = ?$$

(3) 同余定理

若两个整数a、b被自然数m除有相同的余数，那么称a、b对于模m同余

$$29 \equiv 2(\text{mod}9)$$

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

排列组合

加法原理、乘法原理、排列、组合

加法原理

计数原理是数学中的重要研究对象之一，分类加法计数原理、分步乘法计数原理是解决计数问题的最基本、最重要的方法，也称为基本计数原理，它们为解决很多实际问题提供了思想和工具。



加法原理



完成一个工程可以有 n 类办法， $a_i (1 \leq i \leq n)$ 代表第 i 类方法的数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 种不同的方法。



比如说：从武汉到上海有乘火车、飞机、轮船3种交通方式可供选择，而火车、飞机、轮船分别有 k_1 ， k_2 ， k_3 个班次，那么从武汉到上海共有 $k_1 + k_2 + k_3$ 种方式可以到达。



加法原理



例1 从甲地到乙地，能够乘火车，也能够乘汽车，还能够乘轮船。一天中火车有4班，汽车有3班，轮船有2班。问：一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同走法？

分析与解：一天中乘坐火车有4种走法，乘坐汽车有3种走法，乘坐轮船有2种走法，因此一天中从甲地到乙地共有： $4 + 3 + 2 = 9$ （种）不同走法。

例2 旗杆上最多能够挂两面信号旗，现有红色、蓝色和黄色的信号旗各一面，假如用挂信号旗表示信号，最多能表示出多少种不同的信号？

分析与解：依照挂信号旗的面数能够将信号分为两类。第一类是只挂一面信号旗，有红、黄、蓝3种；第二类是挂两面信号旗，有红黄、红蓝、黄蓝、黄红、蓝红、蓝黄6种。因此一共能够表示出不同的信号

$$3 + 6 = 9 \text{（种）}$$

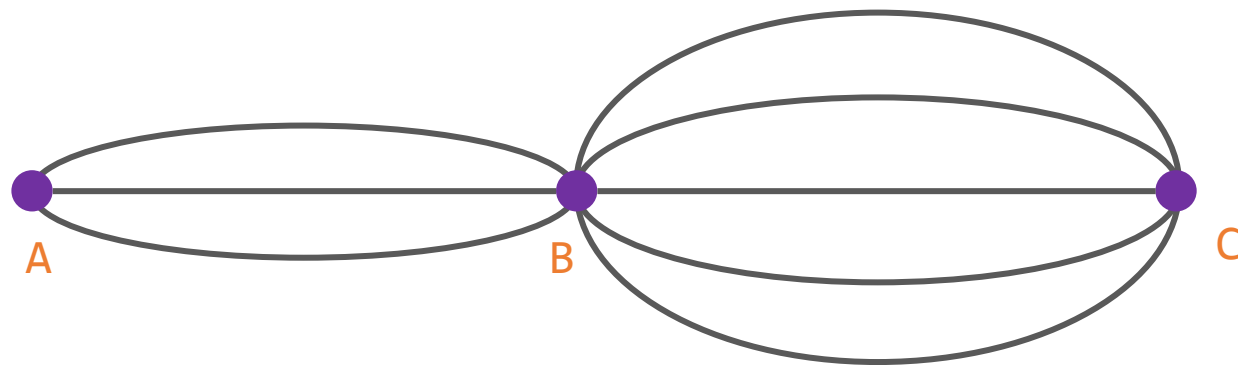


乘法原理



完成一件事情需要分 n 个步骤， $a_i (1 \leq i \leq n)$ 代表第 i 个步骤的不同方法数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ 种不同的方法。

假如A点到B点有3条路，B点到C点有5条路，请问A点到C点有几条路？



还能举出其它例子吗？



乘法原理



如果每个小方格里只能放1和0，那么8个小方格总共可以有多少种表示方法？

1	0	1	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

$$S = 2 \times 2 \times 2 \cdots 2 = 2^8 = 256$$

00000000 ~ 11111111

1byte = 8bit

班级有20名同学，每个小格子只有1和0，如果每个同学给一个唯一的编号，请问至少需要多少个小格子？

排列组合

排列组合是组合学最基本的概念。所谓**排列**，就是指从给定个数的元素中取出指定个数的元素进行排序。**组合**则是指从给定个数的元素中仅仅取出指定个数的元素，不考虑排序。



排列



4个同学站成一排，有多少种不同的排法？

Permutation 排列



4	3	2	1
---	---	---	---

$$S = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$



排列



从 n 个不同元素中，任取 m ($m \leq n, m$ 与 n 均为自然数) 个元素按照一定的顺序排成一行，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列；从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示。排列的计算公式如下：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

说明： $n!$ 表示 n 的阶乘 $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$



排列



$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$A_6^2 = 6 \times 5 = 30$$

$$A_6^1 = 6$$

$$A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$A_5^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$



排列



$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

全排列：n个人全部来排队。第一个位置可以选n个，第二位置可以选n-1个，以此类推得：

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \times 2 \times 1 = n!$$

全排列是排列数的一个特殊情况



排列



$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

例1 从5本书中选3本书，送给3个人，问有多少种分法？

方法一：

5	4	3
---	---	---

方法二：

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

方法三：

$$C_5^3 A_3^3$$



排列



$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

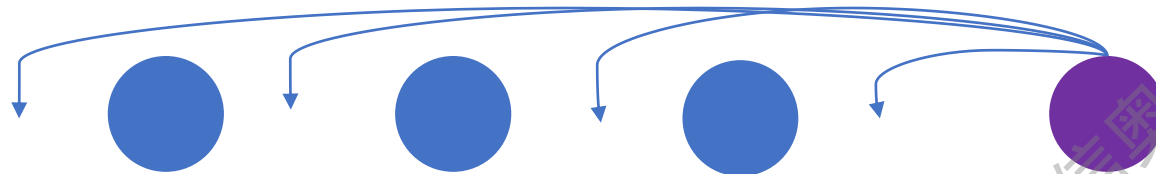
例2 有5个人排成一队照相，其中甲乙两人必须相邻，请问有多少种排法？

方法一：



$$A_4^4 \times A_2^2 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$$

方法二：



$$A_3^3 \times 4 \times 2 = 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 2 = 48$$

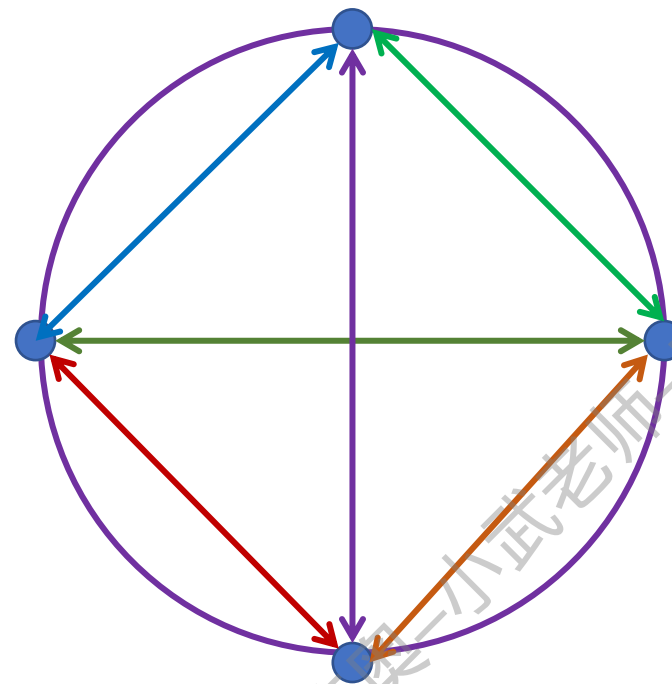


组合



4个同学两两一组，有多少种不同的组合？

Combination 组合





组合



从 n 个不同元素中，任取 $m (m \leq n)$ 个元素组成一个集合，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合；从 n 个不同元素中取出 $m (m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数。用符号 C_n^m 来表示。组合数计算公式：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

如何理解上述公式？我们考虑 n 个人 $m (m \leq n)$ 个出来，不排队，不在乎顺序则有 C_n^m 种。如果在乎排列那么就是 A_n^m ，如果不在乎那么就要除掉重复，那么重复了多少？同样选出的来的 m 个人，他们还要“全排”得 A_m^m ，所以得：

$$C_n^m \times m! = A_n^m$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



组合



从 n 个不同元素中，任取 $m(m \leq n)$ 个元素组成一个集合，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合；从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数。用符号 C_n^m 来表示。组合数计算公式：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{A_3^3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$C_5^2 = \frac{A_5^2}{A_2^2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$C_6^2 = \frac{A_6^2}{A_2^2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

$$C_6^4 = \frac{A_6^4}{A_4^4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2} = 15$$

$$C_3^3 = 1$$

$$C_5^5 = 1$$

$$C_5^1 = 5$$



组合



$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

例3 有6名航天员，选出其中的4名进行神舟十四号载人飞船发射任务，请问有多少种方法？

$$C_6^4 = C_6^2 = 6 \times 5 / 2 = 15$$

例4 10人分乘3辆汽车，要求甲车坐5人，乙车坐3人，丙车坐2人，则有多少种不同的乘车方法？

$$C_{10}^5 C_5^3 C_2^2$$



组合



$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

例5 有6只不同的灯泡，5个不同的灯座，现在要从中选配成2盏灯，共有多少种不同的选配方法？

$$C_6^2 C_5^2 A_2^2$$

例6 10人分乘3辆汽车，要求甲车坐5人，乙车坐3人，丙车坐2人，则有多少种不同的乘车方法？

$$C_{10}^5 C_5^3 C_2^2 = C_{10}^3 C_7^5 C_2^2$$



真题解析



【2017普及组选择题】甲、乙、丙三位同学选修课程，从 4 门课程中，甲选修 2 门，乙、丙各选修 3 门，则不同的选修方案共有（ ）种。

$$C_4^2 C_4^3 C_4^3 = 96$$

【2018普及组选择题】设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 7 个元素组成的子集数为 T，则 T / S 的值为（ ）。

$$S = 2^{10} = 1024, T = C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$$

$$T/S = 120/1024 = 15/128$$

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

真题分类解析

初等数论、排列组合专题

课后习题与实验

Talk is cheap, show me the code !



声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

下节课见啦！

