

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

# 《CSP-J 初赛真题分类解析》

Day05-组合数学与离散数学

主讲人：小武老师

# 组合数学

排列、组合、排列数、组合数、捆绑法、插空法、  
容斥原理、抽屉原理



## 排列与组合



### 排列

$n$  个不同元素中取出  $m$  个元素并按一定顺序排成一列

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

### 组合

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个组合

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{A_3^3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$



## 捆绑法



### 例1-照相（相邻问题捆绑处理）

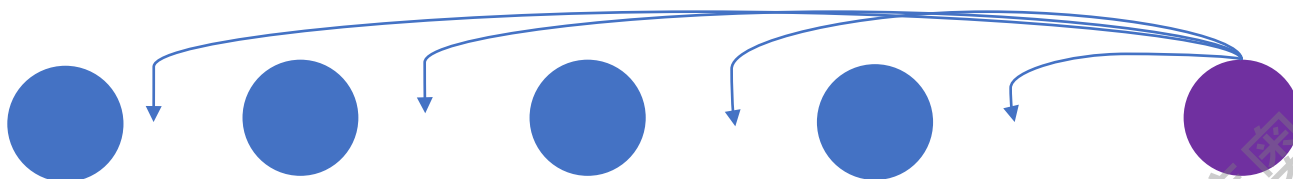
有6个人排成一队照相，其中甲乙两人必须相邻，请问有多少种排法？

方法一：



$$A_5^5 \times A_2^2 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 240$$

方法二：



$$A_4^4 \times 5 \times 2 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 2 = 48$$



## 捆绑法



### 例2-开会(相邻问题捆绑处理，特殊情况优先考虑)

在某场新冠肺炎疫情视频会议中，甲、乙、丙、丁、戊五位疫情防控专家分别按一定的顺序发言，其中甲必须排在前两位，丙、丁必须排在一起，则五位专家不同的发言顺序共有多少种？

甲



甲在1时：

$$A_3^3 \cdot A_2^2 = 3 \times 2 \times 2 = 12$$



甲



甲在2时：

第一只能放乙和戊，剩下两个位置

$$A_2^1 \cdot A_2^2 \cdot A_2^2 = 8$$

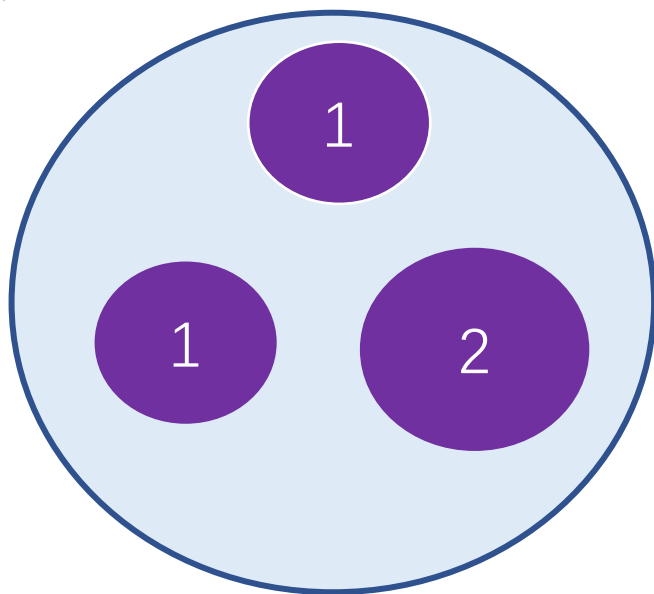


## 捆绑法



### 例3- 放小球

把4个不同的小球全部放入3个不同的盒子中，使每个盒子都不空的放法总数为？



$$C_4^2 \cdot A_3^3 = 36$$

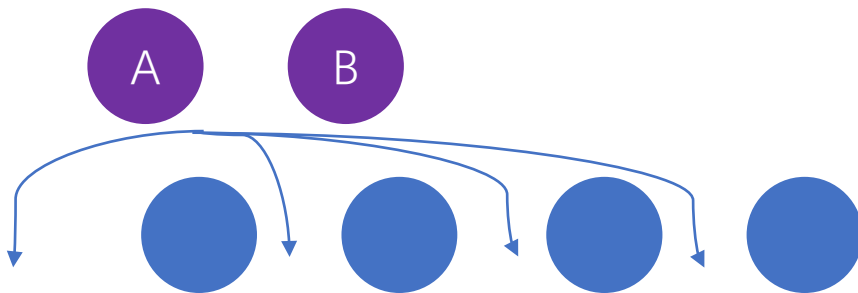


## 插空法



### 例1-考试(不相邻就插空)

本次模拟考试结束后，班级要排一张语文、数学、英语、物理、化学、生物六科试卷讲评顺序表，化学排在生物前面，数学与物理不相邻且都不排在最后，则不同的排表方法共有多少种？



分析

第一步：先放化、生，再放语、英

$$C_4^2 \cdot A_2^2 = 12 \quad \text{或} \quad A_4^4 / 2 = 12$$

第二步：数、物插空

$$A_4^2 = 12$$



## 捆绑法



### 例2 排数字

只用1,2,3,4 四个数字组成一个5位数，规定这四个数字必须同时使用，且同一数字不能相邻出现，这样的五位数有多少个？

分析

当重复为1的时候，先排列 2,3,4,再放1

$$A_3^3 C_4^2 = 36$$

其他数字同理，因此，最终结果为：

$$A_3^3 C_4^2 \times 4 = 144$$





## 特殊优先



特殊元素，优先处理；特殊位置，优先考虑。

**例1：**六人站成一排，求：

(1) 甲、乙既不在排头也不在排尾的排法数

(2) 甲不在排头，乙不在排尾，且甲乙不相邻的排法数

分析 (1)



$$A_4^2 \cdot A_4^4 = 12 \times 24 = 288$$

4个位置选2个放甲乙，剩下的全排列

$$A_4^4(A_3^2 + C_3^1 A_2^2) = 24 \times 12 = 288$$

先排剩下的，再把甲乙插空,(甲乙还可以相邻)



## 特殊优先



**例1：**六人站成一排，求：

- (1) 甲、乙既不在排头也不在排尾的排法数
- (2) 甲不在排头，乙不在排尾，且甲乙不相邻的排法数

312



### 分析 (2)

第一类：甲在排尾，乙在排头

第二类：甲在排尾，乙不在排头，甲乙不相邻

第三类：乙在排头，甲不在排尾

第四类：甲不在排尾也不在排头，乙不在排头也不在排尾

$$A_4^4$$

$$A_3^1 A_4^4$$

$$A_3^1 A_4^4$$

$$A_4^4 \cdot A_3^2$$



## 捆绑与插空



例：8人排成一队

(1) 甲乙必须相邻

$$A_7^7 A_2^2$$

(2) 甲乙不相邻

$$A_6^6 A_7^2$$

(3) 甲乙必须相邻且与丙不相邻

$$A_5^5 A_6^2 A_2^2$$

(4) 甲乙必须相邻，丙丁必须相邻

$$A_6^6 A_2^2 A_2^2$$



## CSP 真题



例2 10个三好学生名额分配到7个班级，每个班至少有一个名额，一共有多少种不同的分配方案？

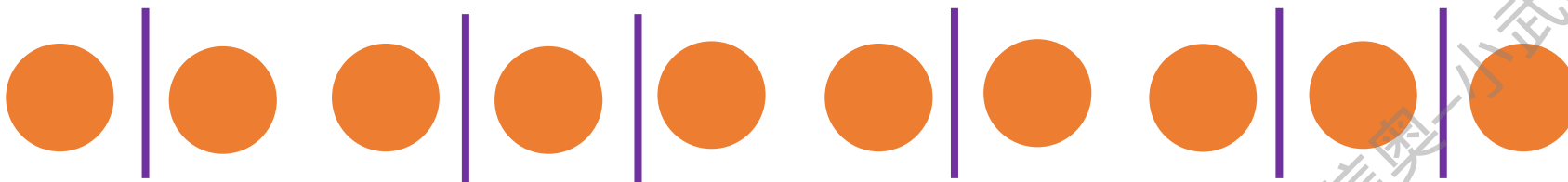


3

1, 1, 1

1, 2

$$C_7^1 + C_7^3 + A_7^2$$



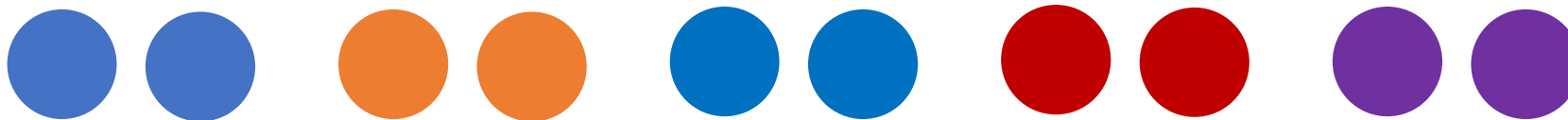
十个名额，有9个空，插入6个板，会分成7个区域，每个区域就是每个班的名额数。



## CSP 真题



**例4** 有五副不同颜色的手套（共 10 只手套，每副手套左右手各 1 只），一次性从中取 6 只手套，请问恰好能配成两副手套的不同取法有（ ）种。



$$C_5^2 C_3^2 C_2^1 C_2^1 = 120$$

**分析：**6只手套，恰好配成2副，意味着从五副手套选两套，剩下的三套里面选两种，每种各选一只

## 容斥原理

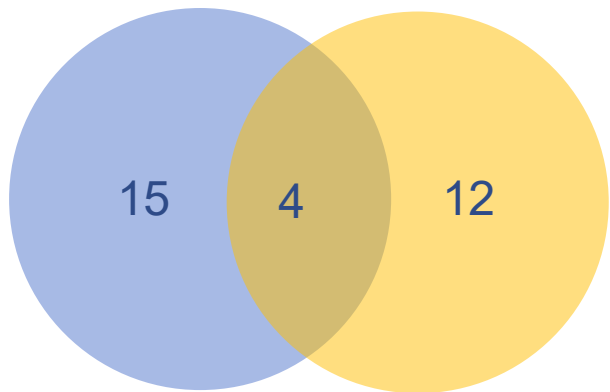
在计数时，必须注意没有重复，没有遗漏。为了使重叠部分不被重复计算，人们研究出一种新的计数方法。



## 容斥原理



【2019 CSP-S】例如：一次期末考试，某班有15人数学得满分，有12人语文得满分，并且有4人语、数都是满分，那么这个班至少有一门得满分的同学有多少人？



“至少有一门得满分的同学”称为“数学和语文元素个数”的总和。为 $15+12-4=23$ 。

容-包含

斥-排斥

$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

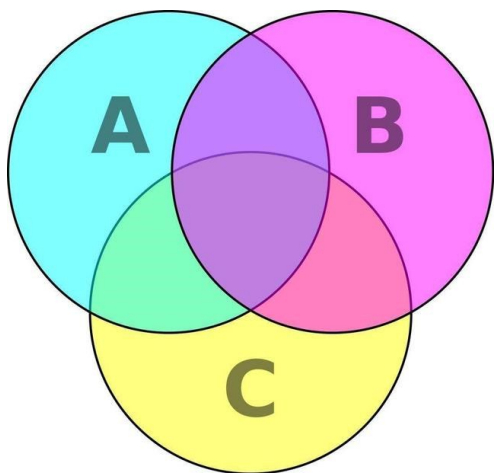
基本思想是：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复，这种计数的方法称为容斥原理。



## 容斥原理



某校六(1)班有学生45人，每人在暑假里都参加体育训练队，其中参加足球队的有25人，参加排球队的有22人，参加游泳队的有24人，足球、排球都参加的有12人，足球、游泳都参加的有9人，排球、游泳都参加的有8人，问：三项都参加的有多少人？



$$25+22+24-12-9-8+X=45, \text{ 解得 } X=3$$

想象成三层的贴纸，怎么撕贴纸？

$$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - B \cap C - C \cap A + A \cap B \cap C$$





## 容斥原理



【2015提高组问题求解】在 1 和 2015 之间（包括 1 和 2015 在内）不能被 4、5、6 三个数任意一个数整除的数有 1075 个

能被4整除503个，能被5整除403个，能被6整除335个。能同时被4和5整除有100个（ $2015/20=100$ ），能同时被4和6整除的有167个，能同时被5和6整除有67个，能同时被三者整除有33个，所以能被4或5或6整除的个数是： $503+403+335-100-167-67+33=940$ ，则不被4,5,6任意一个数整除的数的个数为 $2015-940=1075$

【模拟】在1到1000的自然数中，能被3或5整除的数共有多少个？不能被3或5整除的数共有多少个？

分析：显然，这是一个重复计数问题（当然，如果不怕麻烦你可以分别去数3的倍数，5的倍数）。我们可以把“能被3或5整除的数”分别看成A类元素和B类元素，能“同时被3或5整除的数（15的倍数）”就是被重复计算的数，即“既是A类又是B类的元素”。求的是“A类或B类元素个数”。我们还不能直接计算，必须先求出所需条件。 $1000 \div 3 = 333 \dots 1$ ，能被3整除的数有333个，同理，可以求出其他的条件。



## 容斥原理



【模拟】一个旅行社有36个人，其中会英语的有24人，会法语的有18人，两样都不会的有4人。问两样都会的有多少人？ **10**

集合A：会英语的人数

集合B：会法语的人数

集合A∪B：至少会一样的人数  $36 - 4 = 32$  人。

$$32 = 24 + 18 - x, \quad \text{则 } x = 10$$

【脑筋急转弯】一张照片有两对父子，数数却只有3个人，为什么？

$$2 + 2 - 1 = 3$$

## 抽屉原理

桌上有十个苹果，要把这十个苹果放到九个抽屉里，无论怎样放，我们会发现至少会有一个抽屉里面放不少于两个苹果。这一现象就是我们所说的“抽屉原理”（又叫鸽巢原理）



## 抽屉原理



桌上有十个苹果，要把这十个苹果放到九个抽屉里，无论怎样放，我们会发现至少会有一个抽屉里面放不少于两个苹果。这一现象就是我们所说的“**抽屉原理**”（又叫鸽巢原理）

有 $n+1$ 只鸽子飞进 $n$ 个巢中，那么至少有一个鸽巢中有两只或两只以上的鸽子。





## 抽屉原理



抽屉原理的一般含义为：“如果每个抽屉代表一个集合，每一个苹果就可以代表一个元素，假如有 $n+1$ 个元素放到 $n$ 个集合中去，其中必定有一个集合里至少有两个元素。”抽屉原理有时也被称为鸽巢原理。

- 1、把 98 个苹果放到 10个抽屉里，无论怎么放，我们一定能找到一个含苹果最多的抽屉，它里面至少有？ 个苹果。 **10**
- 2、1000只鸽子飞进50个巢，无论怎么飞，我们一定能找到一个含鸽子最多的巢，它里面至少有？只鸽子。 **20**
- 3、从8个抽屉里拿出 17个苹果，无论怎么拿，我们一定能拿到苹果最多的那个抽屉，从它里面至少拿出?个苹果。 **3**



## 抽屉原理



### 第一抽屉原理

- 1、把多于 $n+1$ 个物体放到 $n$ 个抽屉里，则至少有一个抽屉的东西不少于两个。
- 2、把 $mxn+1$ 个物体放到 $n$ 个抽屉里，则至少有一个抽屉里不少于 $m+1$ 个

$$(mxn+1) \div n = m \dots 1$$

### 第二抽屉原理

把 $mxn-1$ 个物体放入 $n$ 个抽屉中，其中必有一个抽屉中至多有 $m-1$ 个物体

例如：将 $3 \times 5 - 1 = 14$ 个物体放入5个抽屉中，则必定有一个抽屉中的物体数小于等于 $3 - 1 = 2$





## 抽屉原理



【2019CSP-J选择题】一副纸牌除掉大小王有52张牌，四种花色，每种花色13张。假设从这52张牌中随机抽取13张纸牌，则至少（ 4 ）张牌的花色一致。

【模拟】大家玩过石头、剪刀、布的游戏吗？如果两个同学出17次，至少有多少次手势是相同的？

把石头、剪刀、布看作三个抽屉，17次平均放到3个抽屉，17除以3，商是5，余数是2，至少一个抽屉里有 $5+1$ 次，所以至少有6次手势是相同的。

6

【模拟】六年级152人参加体育活动，安排跳绳、投篮、爬杆三项活动，每位同学至少参加一项活动，参加相同活动种类最多的学生至少有多少个？

三项活动对应三个抽屉，152人放三个抽屉， $152 \div 3 = 50 \cdots 2$ ，至少一个抽屉里有 $50+1$ 次，所以参加相同活动种类最多的学生至少有51人。

51

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

# 真题分类解析

容斥原理、抽屉原理



## 课后习题与实验

Talk is cheap, show me the code !



声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

下节课见啦！

